المحاضرة السادسة عشر

تتمة نتائج تايلور:

إذا كان f تابعاً تحليلياً على منطقة G، وكان $\overline{D}(z_0,r)\subset G$ (أي أنّ f تحليلي على محيط $C^+(z_0,r)$ وداخله)، عندئذٍ فإنّ

$$\int_{C^+(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)\ :\ \forall n\geq 0$$

صيغة كوشي التكاملية الثانية.

تمرين: احسب

$$\int_{C^+(i,1)}\frac{e^{2z}}{(z-i)^3}dz$$

الحل: إنّ التابع $f(z)=e^{2z}$ تحليلي على $\mathbb{C}$، كما أنّ $\overline{D}(i,1)\subset\mathbb{C}$، ومنه فإنّ

$$\int_{C^+(i,1)}\frac{e^{2z}}{(z-i)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f^{(2)}(i)=\pi i\left(4e^{2i}\right)=4\pi i\left(e^{i}\right)^2$$
$$=4\pi i(cos1+i\sin 1)^2=4\pi i(cos2+isin2)$$

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً على قرص $D(z_0,r)$، فإنّ لـ f تابع أصلي على $D(z_0,r)$.

الإثبات: إنّ f تحليلي على $D(z_0,r)$، وحسب مبرهنة تايلور :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\qquad \forall z\in D(z_0,r)$$

لنأخذ التابع :

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$$

إنّ F تحليلي على $D(z_0,r)$، لأنّه تابع ممثل بمتسلسلة قوى نصف قطر تقاربها $r>0$." أثبت ذلك"

$$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(n+1)(z-z_0)^n=f(z)\quad :\quad \forall z\in D(z_0,r)$$

وبالتالي فإنّ F تابع أصلي لـ f على $D(z_0,r)$، وهو المطلوب.

نتيجة: إذا كان f تحليلياً على قرص $D(z_0,r)$، فإنّ تكامل f مستقل عن الطريق المسلوك في ذلك القرص.

بالنتيجة فإنّ تكامل f على أي طريق مغلق في $D(z_0,r)$ معدوم.

تعريف: نقول عن طريق مغلق بسيط γ في منطقة G إنّه مشوه للصفر باستمرار (أو مشوه لنقطة) في تلك المنطقة إذا كان وداخله محتويين في G، ونرمز لذلك $\gamma\sim 0$ في G، وتقرأ γ مشوه للصفر في منطقة G.

مثال: $C^+(0,1)$ ليس مشوهاً للصفر في $\mathbb{C}^*$، لأنّ $0\in C^+(0,1)$ ولا تنتمي لـ $\mathbb{C}^*$.

تعريف: نقول عن منطقة G إنّها بسيطة الترابط إذا كان كل منحنٍ مغلق فيها مشوهاً للصفر"بمعنى أن هذه المنطقة خالية من الفجوات"

أمثلة:

- المستوي $\mathbb{C}$ بكامله منطقة بسيطة الترابط.
- الأقراص المفتوحة هي مناطق مفتوحة الترابط.
- الأشرطة دون حوافها هي مناطق بسيطة الترابط.
- أنصاف المستويات المفتوحة هي مناطق بسيطة الترابط.
- $\mathbb{C}^*$ ليست منطقة بسيطة الترابط، وذلك لوجود منحن مغلق فيها هو $C^+(0,1)$ وليس مشوهاً للصفر فيه.

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً على منطقة بسيطة الترابط، فإنّ لـ f تابع أصلي على تلك المنطقة.

مثال: هل للتابع $f(z)=\frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C}\backslash Ox^-$.

الحل: إنّ $\mathbb{C}\backslash Ox^-$ منطقة (مفتوحة ومترابطة) بسيطة الترابط لأنّ أي منحني فيها سيكون مشوهاً للصفر" أي منحني مغلق سيكون وهو وداخله محتويين فيها"، وبالتالي فإنّ للتابع $f(z)=\frac{1}{z}$ تابع أصلي على $\mathbb{C}\backslash Ox^-$ لأنه تحليلي على هذه المنطقة بسيطة الترابط.

تمرين: هل للتابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^2+9}$ تابع أصلي على الشريط $G=\{z:\ -1<Im\,(z)<3\}$.

الحل:

إنّ الشريط G هو منطقة بسيطة الترابط، كما أنّ التابع f تحليلي على هذه المنطقة لأنّ هذه المنطقة لا تحوي $3i,-3i$. و للتابع f تابع أصلي على هذه الشريط.

مثال: احسب $\int_{C^-(0,\frac{1}{2})}\frac{\sin z}{z^2+9}dz$

الحل: إنّ هذا التكامل يساوي الصفر لأنّ التابع المكامل $\frac{\sin z}{z^2+9}$ تحليلي على الشريط G، ولأنّ هذا الشريط منطقة بسيطة الترابط، كما أنّ الطريق $C^-\left(0,\frac{1}{2}\right)$ طريق مغلق في ذلك الشريط.

ملاحظة: لو استبدلنا $C^-\left(0,\frac{1}{2}\right)$ بـ $C^-(0,1)$ فإنّ f سيكون تحليلي على محيط وداخل $C^-(0,1)$ والطريق مغلق فالتكامل معدوم.

تمرين: أثبت أنّ $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = 0$ أياً كان الطريق المغلق الذي لا يحوي بداخله ولا على محيطه المبدأ.

الحل: ليكن C منحنياً بسيطاً بدايته المبدأ ويذهب إلى اللانهاية، ودون أن يقطع المنحني Γ.

بما عندئذ فإنّ $G = \mathbb{C}\backslash C$ منطقة بسيطة الترابط، كما أنّ التابع $\frac{1}{z}$ تحليلي على هذه المنطقة بسيطة الترابط، وأنّ المنحني Γ مغلق في هذه المنطقة، وبالتالي فإنّ التكامل على Γ معدوم.

تعريف: ليكن γ_1, γ_2 منحنيين مغلقين في منطقة G، أحدهما يقع داخل الآخر ولهما الاتجاه ذاته وعدد مرات المسح ذاته، والمنطقة المحصورة بين المنحنيين محتواة بكاملها في G، عندئذٍ فإنّنا نقول إن γ_1 مشوه باستمرار لـ γ_2 في G، ونرمز لذلك بـ $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G.

مبرهنة: ليكن f تابعاً تحليلياً على منطقة G، وليكن $\gamma_1 \sim \gamma_2$ في G، عندئذٍ فإنّ :

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$ حيث Γ طريق مغلق يحوي بداخله المبدأ.

الحل: لنفرض أنّ Γ ممسوح بالاتجاه الموجب مرة واحدة، وليكن $\Gamma_1 = C^+(0,r)$، حيث $r > 0$ صغير كفاية، حتى يكون Γ_1 واقع بداخل Γ. إن $\Gamma_1 \sim \Gamma$ في C^*، وإنّ التابع المكامل $f(z) = \frac{1}{z}$ تحليلي على C^* التي تحوي Γ_1، Γ و المنطقة المحصورة بينهما، فحسب المبرهنة :

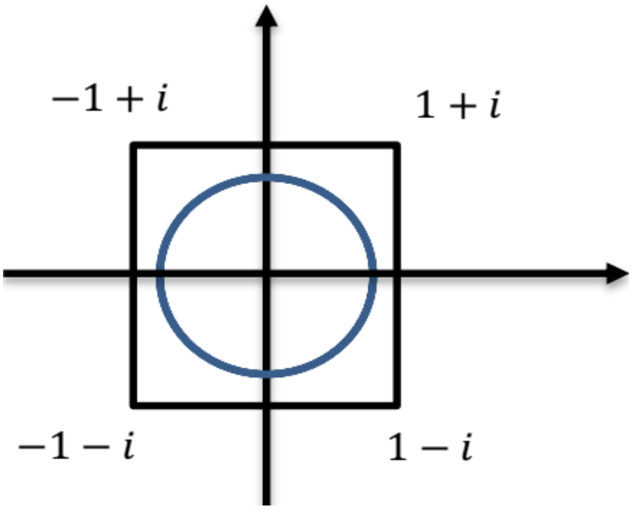
$$\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\, dt = 2\pi i$$

حيث

$$C^+(0,1) : \gamma(t) = re^{it} : 0 \le t \le 2\pi$$

تمرين : احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z}dz$ حيث Γ هو المربع الذي رؤوسه هي $1+\mathrm{i}$، $1-\mathrm{i}$، $-1-\mathrm{i}$، $-1+\mathrm{i}$.

الحل : إن Γ هو المربع مسموح مرة واحدة بالاتجاه الموجب (اصطلاحا). لنأخذ داخل المربع دائرة $C^+\left(0,\frac{1}{2}\right)$ كما هو موضح في الشكل التالي :



إنّ $C^+\left(0,\frac{1}{2}\right)$ سيكون مشوهاً للمربع في $\mathbb{C}^*$، حيث أنّ هذه الدائرة والمربع والمنطقة المحصورة بينهما محتواة في $\mathbb{C}^*$، وأنّ الدائرة والمربع بالجهة ذاتها ولهما نفس عدد مرات المسح " مرة واحدة" كما أنّ f تحليلي على C^* :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{C^+\left(0,\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

مبرهنة: إذا كان f تحليلياً على محيط وداخل منحنٍ مغلق Γ ممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب وكانت z_0 داخل هذا المنحني، فإنّ:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = 2\pi i f \quad (z_0)$$

$$\int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

نُسمّي العلاقات السابقة صيغ كوشي التكاملية المعممة.

تمرين هام: احسب التكامل $\int_{\Gamma_j} \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz$ حيث $j = 1,2,3,4$، وأنّ

1. Γ_1 مغلق يحوي بداخله i ولا يحوي الصفر.
2. Γ_2 مغلق يحوي بداخله الصفر ولا يحوي i.
3. Γ_3 مغلق لا يحوي بداخله i ولا يحوي الصفر.
4. Γ_4 مغلق يحوي بداخله i ويحوي الصفر.

الحل:

1. لدينا :
$$\int_{\Gamma_1} \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-i} dz$$

بما أنّ التابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ تحليلي على محيط وداخل المنحني Γ_1، وأنّ i تقع داخل Γ_1 الممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب فبحسب المبرهنة السابقة يكون:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \frac{\sin i}{i^2} = -2\pi i \sin i = -2\pi i \, ish(1)$$
$$= 2\pi \, sh\,(1)$$

2. كما أن :

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z-i}}{z^2} dz$$

نلاحظ أنّ التابع $f_1(z) = \frac{\sin z}{z-i}$ تحليلي على محيط وداخل Γ_2، وأنّ Γ_2 مغلق وممسوح مرة واحدة بالاتجاه الموجب، كما أنّ $z_0 = 0$ داخل Γ_2، فحسب المبرهنة:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z-i}}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0)$$

لكن :

$$f_1'(z) = \frac{(\cos z)(z-i) - \sin z}{(z-i)^2} \Longrightarrow f_1'(0) = -\frac{i}{(-i)^2} = i$$

نعوض في التكامل فنجد:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\sin z}{z^2(z-i)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) = 2\pi i \, i = -2\pi$$

3. التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل Γ_3، إذن التكامل يساوي الصفر "حيث أنّ f تحليلي على $\mathbb{C}\backslash\{0, i\}$، و Γ_3 مشوه للصفر في هذه المنطقة فالتكامل يساوي الصفر".

4. طريقة أولى :

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-i}$$

بحساب الثوابت نجد أنّ

$$A = 1, B = i, C = -1$$

بالتعويض نجد

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}dz = \int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z}dz + i\int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z^2}dz - \int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z-i}dz$$

$$= 2\pi i(\sin(0) + i\, cos\,(0) - \sin(i))$$

$$= 2\pi(sh(1) - 1)$$

الأسلوب الثاني: هو أن نقوم بما يلي:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}dz = \int_{C^+(0,r_1)} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}dz + \int_{C^+(0,r_2)} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}dz$$

حيث r_1, r_2 عددين موجبين صغيرين كفاية حتى يكون كل من $C^+(0,r_1), C^+(0,r_2)$ موجودتين داخل Γ_4، وغير متقاطعتين.

انتهت المحاضرة السادسة عشر...